Cours 5 – 25/09/2024

3. Balistique – Chute libre

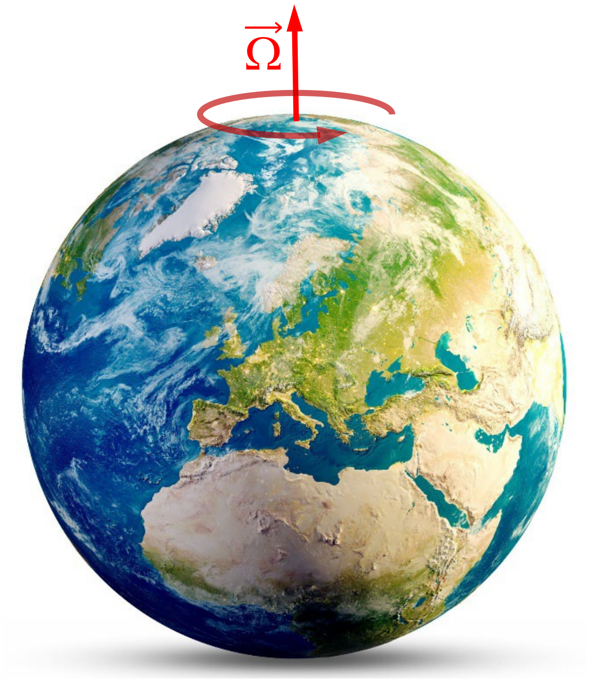
3.1. Chute libre

3.2. Mouvement balistique

4. Référentiel non-galiléen; loi de Coriolis

4.1. Introduction

4.2. Référentiel en rotation



3.1. Chute libre

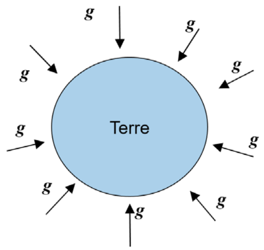
Force gravitationnelle

La Terre exerce sur un objet de masse m une force gravitationnelle, appelée communément le poids, dont la forme est

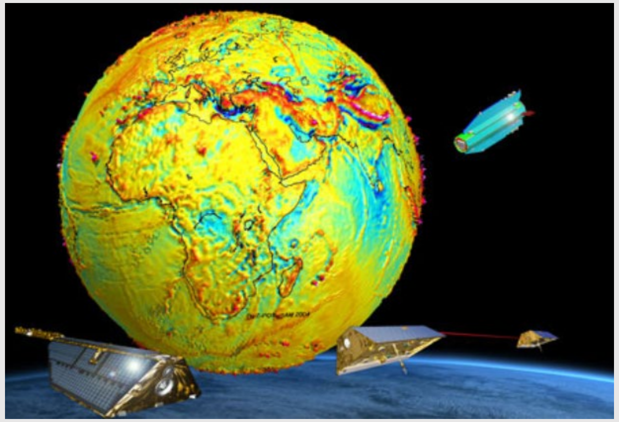
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

$\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.

$\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la Terre.



A l'échelle du laboratoire, $\vec{g}$ est de norme constante $||\vec{g}|| = 9{,}81\ m.s^{-2}$

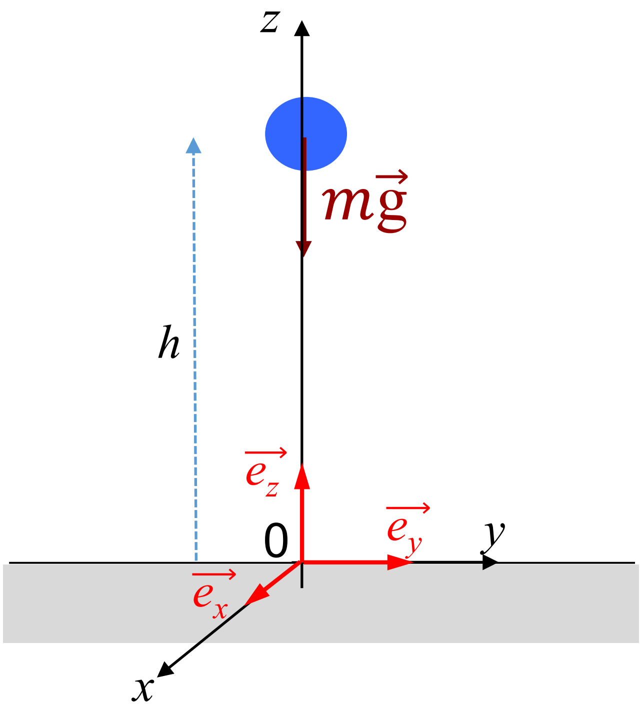


Information scientifique

La mesure de g se fait aujourd'hui grâce à des accéléromètres (ce sont des microsystèmes) ultra-sensibles placés dans des satellites qui détectent leur changement de trajectoire. Ces microsystèmes seraient capables de mesurer la force d'impact d'un flocon de neige (0,2g) tombant sur un pétrolier d'un million de tonnes !

3.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)



1 - On définit le système et le référentiel, puis on définit un repère

Le système est la balle. Le référentiel est la Terre. On prend un repère cartésien avec l'origine au point de chute sur le sol (rem: on pourrait prendre aussi l'origine au point de départ).

2 - On applique la 2nd loi de Newton pour étudier le mouvement : $m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_{ext,i}}$

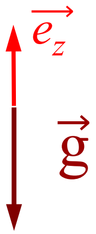
la seule force externe est le poids (pour simplifier on néglige dans cet exemple la force de frottement de l'air)

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

3 - On projette l'expression vectorielle de la 2nd loi de Newton sur les axes du repère

$$\begin{cases} \text{sur } Ox : \ a_x = \vec{g} \cdot \vec{e_x} = 0 \\ \text{sur } Oy : \ a_y = \vec{g} \cdot \vec{e_y} = 0 \\ \text{sur } Oz : \ a_z = \vec{g} \cdot \vec{e_z} = -g \end{cases}$$

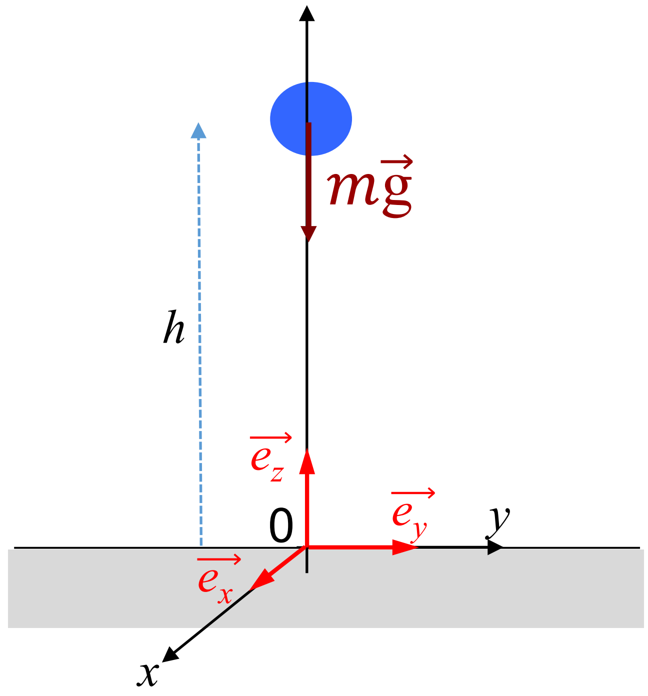
le signe " − " vient du produit scalaire car $cos(\pi) = -1$



Pour déterminer l'équation du mouvement, il faut maintenant intégrer par rapport au temps, une première fois pour la vitesse, et une deuxième fois pour la position.

3.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)



Vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \int_0^t a_x dt = \int_0^t 0\, dt = cte = 0 & \textit{car la vitesse est nulle à t=0} \\ v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t 0\, dt = cte = 0 & \textit{car la vitesse est nulle à t=0} \\ v_z = \int_0^t a_z dt = \int_0^t -\mathrm{g}\, dt = -\mathrm{g}t + cte = -\,\mathrm{g}t & \textit{cte =0 car la vitesse est nulle à t=0} \end{cases}$$

Position :

$$\begin{cases} x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t 0\, dt = cte = 0 & \textit{car x=0 à t=0} \\ y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t 0\, dt = cte = 0 & \textit{car y=0 à t=0} \\ z = \int_0^t v_z dt = \int_0^t -\mathrm{g}t\, dt = -\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + cte & \textit{avec cte =h car z=h à t=0} \end{cases}$$

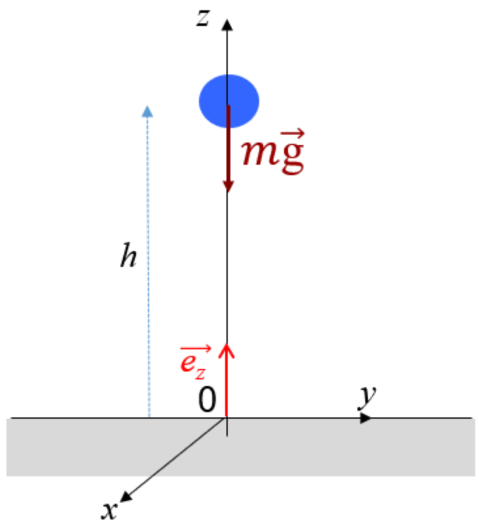
Equation du mouvement : $z(t) = h - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2, x(t) = 0, y(t) = 0$

$$\vec{r}(t) = \left(h - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\right)\vec{e_z} = h\vec{e_z} + \frac{1}{2}\vec{\mathrm{g}}t^2$$

<u>Remarque</u> : l'équation du mouvement dépend du choix du repère

3.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)



On cherche le temps pour lequel la balle touche le sol :

Equation du mouvement

$$z(t) = h - \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}}}$$

Indépendant de la masse
(si on ne prend pas en compte les frottements de l'air)

De la relation précédente, on peut exprimer g en fonction du temps de chute :

$$\boxed{g = \frac{2h}{t^2}} \quad m.s^{-2}$$

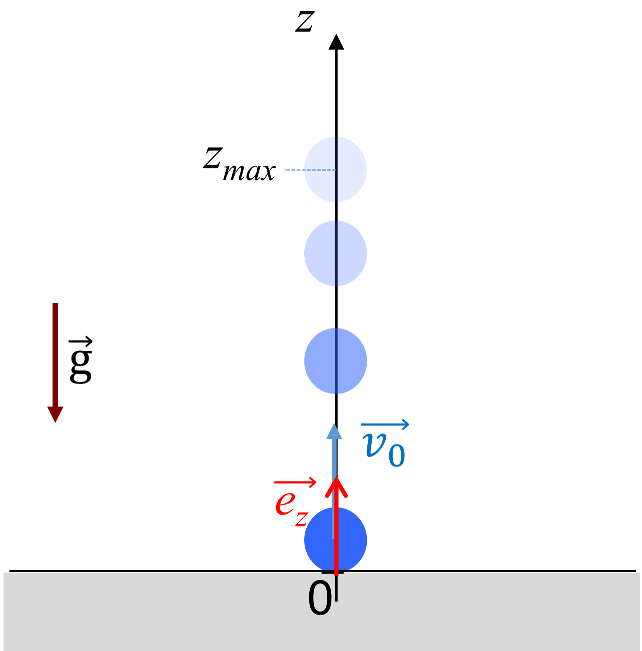
C'est un moyen simple de mesurer g

Plus grosse chambre à vide du monde

3.1. Chute libre

Mouvement rectiligne : hauteur maximum

Balle lancée (dans le vide≡pas de frottement) verticalement avec une vitesse v_0



2[nd] loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g}$ et on projette sur Oz : $a = -g$

Vitesse initiale $(t=0)$: $v(0) = v_0$ projection de $\vec{v_0}$ sur Oz

Position initiale $(t=0)$: $z(0) = 0$

$$v(t) = \int -g\,dt = -\,g t + \underbrace{cte}_{=v_0} = v_0 - g t \Rightarrow z(t) = \int v(t)\,dt = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \underbrace{cte}_{=0}$$

Equation du mouvement : $\boxed{z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$

Hauteur maximum z_{max} : la vitesse devient nulle à z_{max}

⇨ on calcule t_{ret} le temps mis pour atteindre z_{max}

$$v(t_{ret}) = 0 = v_0 - g t_{ret} \Rightarrow t_{ret} = v_0/g$$

$$z_{max} = v_0 t_{ret} - ½\, g t_{ret}^2$$

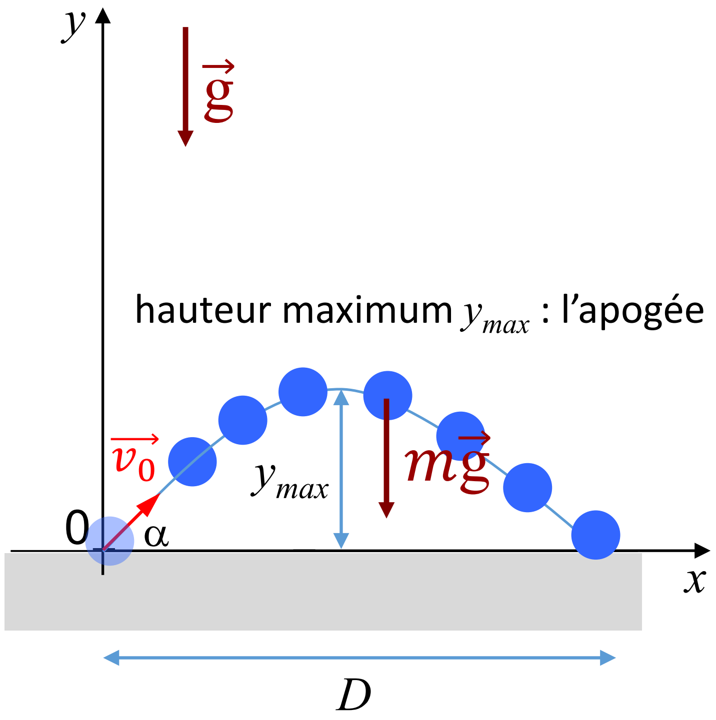
on remplace t_{ret} par v_0/g et on trouve $\boxed{z_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}}$

A.N.: v_0=10 m/s (36 km/h)
z_{max}= 5 m (terre)
= 31 m (lune)

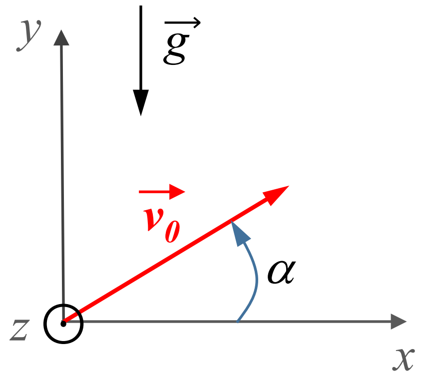
Indépendant de la masse

3.2. Mouvement balistique

Tir balistique : objet lancé avec une vitesse $\vec{v_0}$ formant un angle α par rapport au sol horizontal dans un champ gravitationnel uniforme $\vec{g}$



■ Tir balistique



Composantes du vecteur accélération :

2nd loi de Newton $\Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g}$ et on projette sur Ox, Oy, et Oz :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

composante horizontale : projection sur Ox
composante verticale : projection sur Oy
composante dans le plan : projection sur Oz

Composantes de la vitesse :

On intègre l'accélération par rapport au temps pour obtenir la vitesse

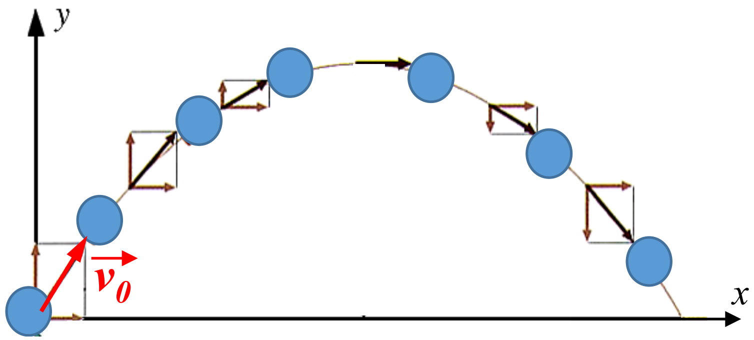
A $t=0$, nous avons $\vec{v}(0) = \overrightarrow{v_0}$ avec $\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{v_0}$

soit après intégration $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$ *on rappelle que* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

On remarque que le mouvement se situe dans un plan $\Rightarrow$ on aurait pu choisir un repère à 2 dimensions

3.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique



Equation horaire du mouvement :

On intègre la vitesse par rapport au temps pour obtenir les composantes du vecteur position. On détermine les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales :

Position : $$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Equation intrinsèque de la trajectoire : $y(t) = v_0 \sin\alpha \;\; t - \frac{1}{2} g t^2$

on cherche $y = f(x)$

Nous avons $x = v_0 \cos\alpha \;\; t$

d'où $\quad t = x/(v_0 \cos\alpha)$

On remplace t dans $y(t) = v_0 \sin\alpha \;\; t - \frac{1}{2} \mathrm{g} t^2$ ➡

$$\boxed{y(x) = x \tan\alpha - x^2 \frac{g}{2 v_0^2} \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

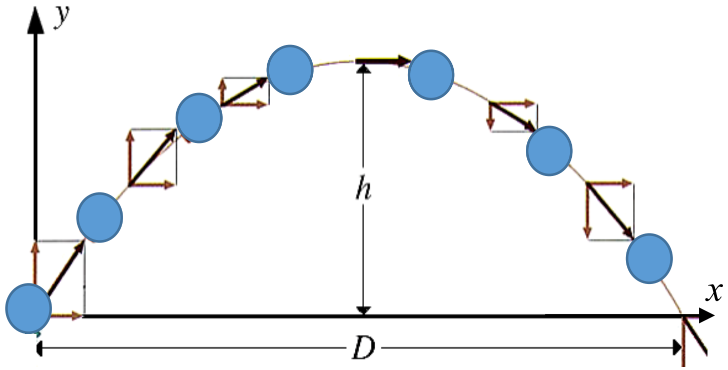
Equation d'une parabole $\quad (y = ax + bx^2)$

3.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique

Distance D (portée) :

Dans le repère considéré, D est définie par $y = 0$ (balle touche le sol), soit $x = D$



$$y(x) = x\tan\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$y(D) = 0 = D\tan\alpha - D^2 \frac{g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$0 = \sin\alpha - D\frac{g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{D = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{g}} = \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}\sin(2\alpha)}$$

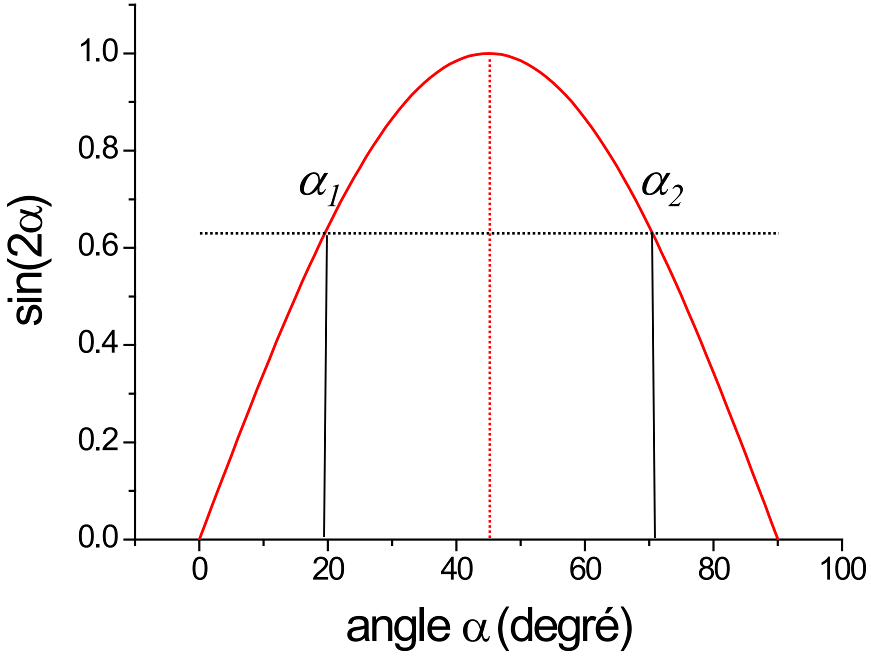
$sin2\alpha = 2cos\alpha\, sin\alpha$

Tir balistique

Portée : $D = \dfrac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$

1) Le sinus est maximum pour $2\alpha = 90°$, soit $\alpha = 45°$

2) Lorsque α varie entre 0 et 90°, il existe deux angles α_1 et α_2 tel que $sin(2\alpha_1) = sin(2\alpha_2)$



1) D maximum pour 45°

2) Il existe 2 angles donnant la même distance D

http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/Projectile/projectile.html

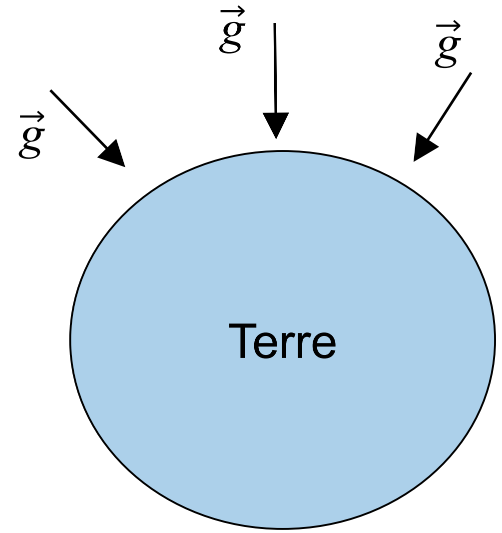
Remarques

- La trajectoire n'est plus une parabole si

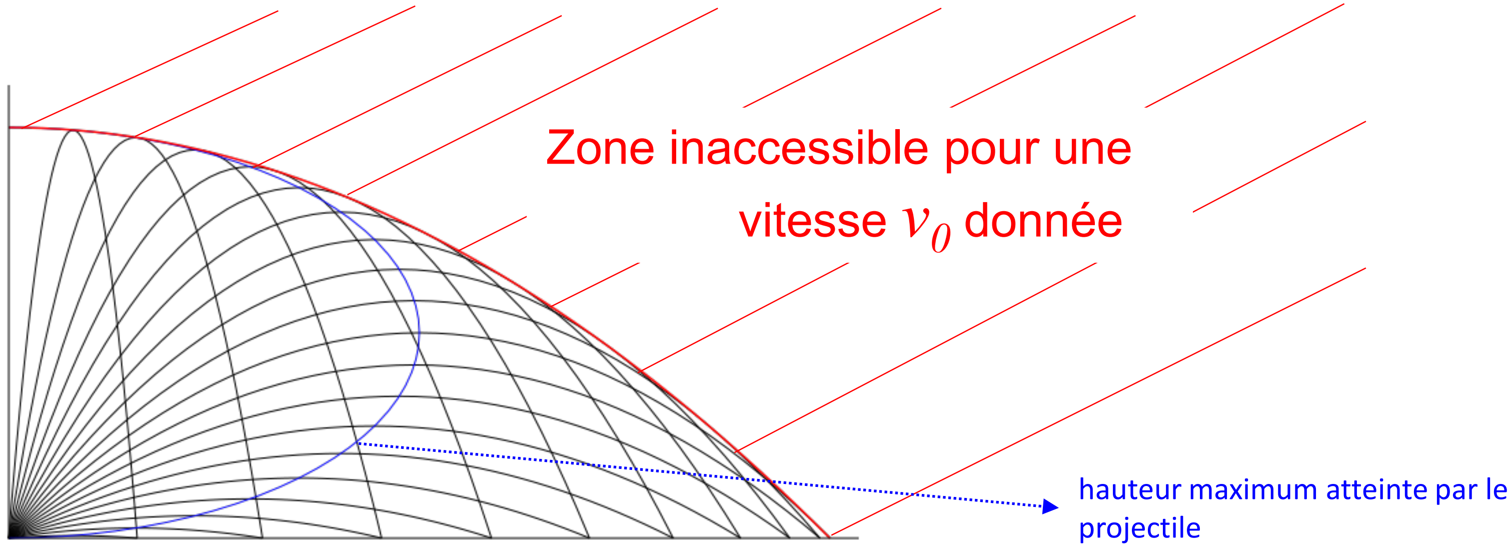
  - On tient compte de la résistance de l'air

  - Pour des tirs de projectiles à longue portée

    Les vecteurs $\vec{g}$ sont dirigés vers le centre de la terre. Si 2 points sont très éloignés alors les vecteurs $\vec{g}$ le long de la trajectoire ne sont plus colinéaires.



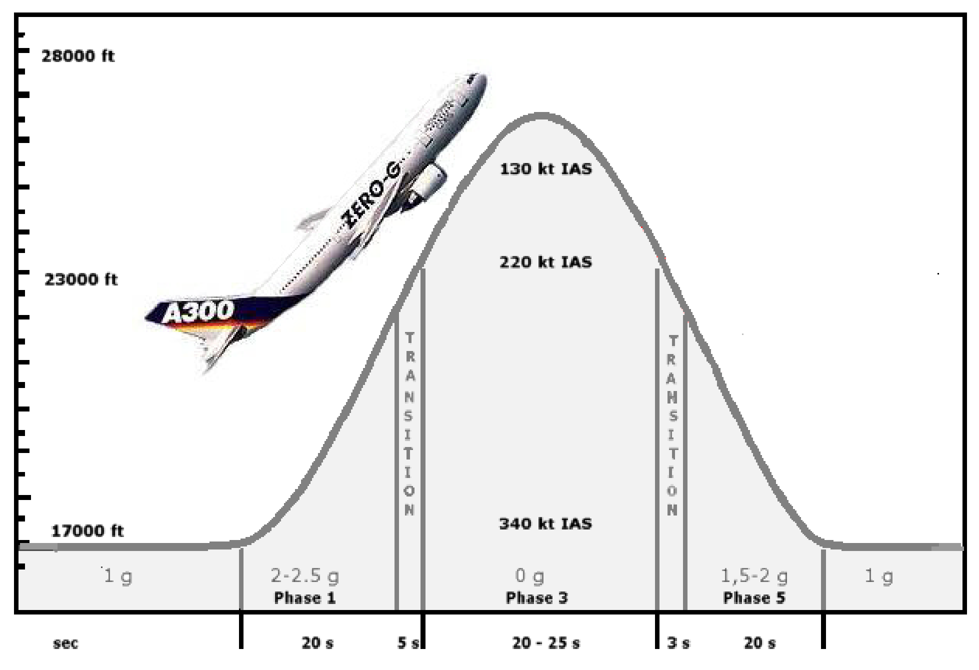
- Parabole de sureté



3.2. Mouvement balistique

Information scientifique

Vol parabolique pour créer une micro-pesanteur (situation de chute libre)

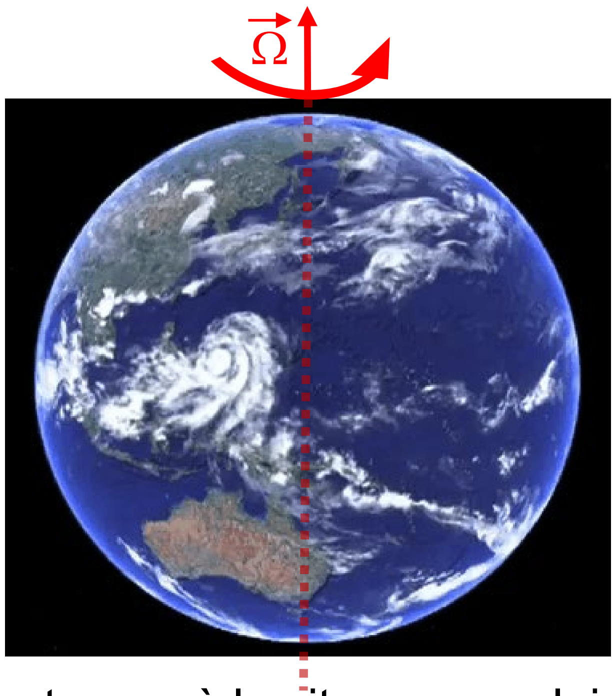


Permet de tester l'influence de la gravitation sur de nombreux phénomènes physiques

http://www.novespace.fr/fr,vol,technique.html

4. Référentiel non-galiléen; loi de Coriolis

- La Terre est un référentiel en rotation uniforme autour d’un axe passant par les pôles géographiques (nord et sud)



La terre tourne à la vitesse angulaire Ω

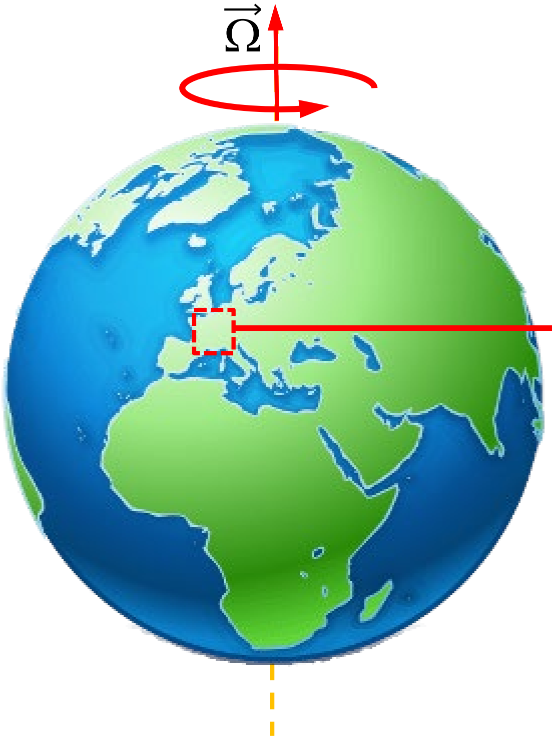
↳ La Terre n’est pas un référentiel galiléen

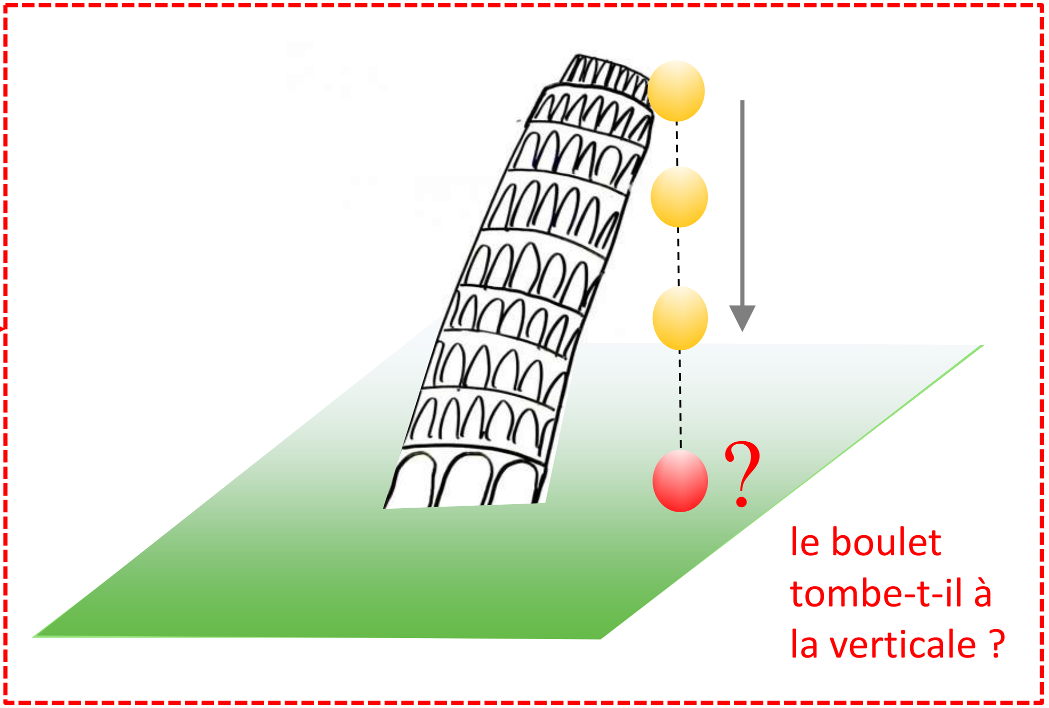
Quelle est l’influence de la rotation de la Terre sur un lancer balistique?

Quelle est la trajectoire (vue du ciel) d’un objet lancé vers le Sud ou vers le Nord ?

4. Référentiel non-galiléen; loi de Coriolis

Effet de la rotation de la Terre sur la chute libre d'un corps





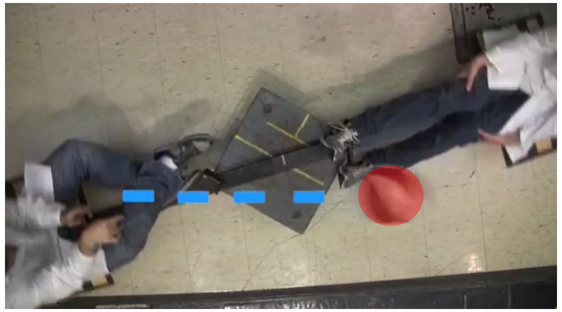
- Quelle est l'influence de la rotation de la Terre sur la chute libre d'un corps (position du point d'impact par rapport à la verticale du point de lâcher) ?

- Comment calculer la trajectoire pour un observateur se trouvant dans un repère lié à la Terre ?

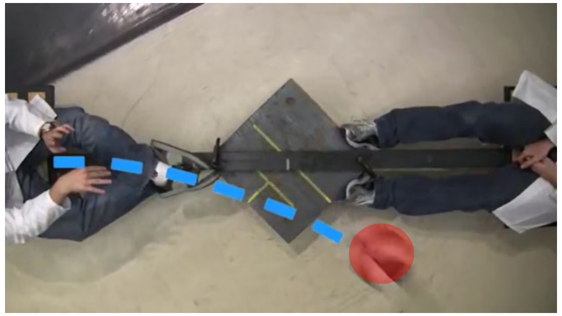
4. Référentiel non-galiléen; loi de Coriolis

- Trajectoire dans un référentiel en rotation

Le manège



trajectoire vue dans le référentiel de la salle



trajectoire vue dans le référentiel de la plateforme tournante

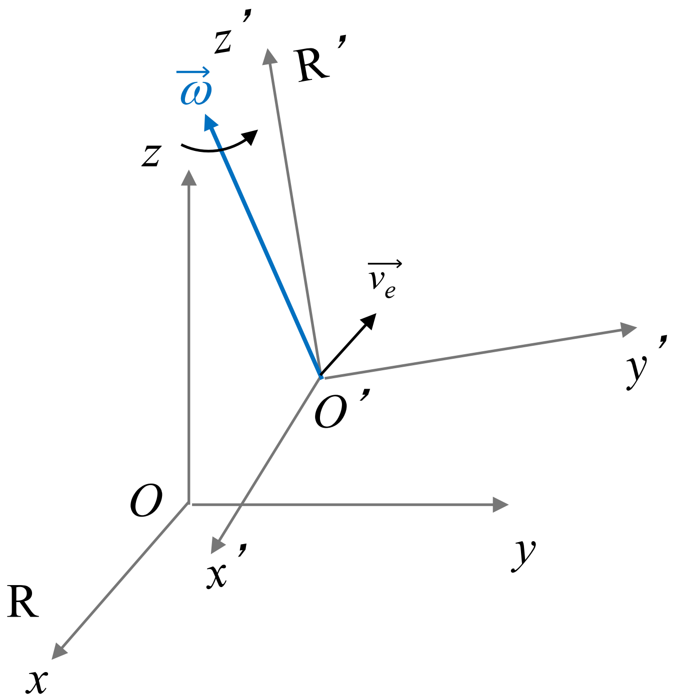
4.1 Introduction

■ Référentiel galiléen (inertiel)

Définition : dans un référentiel galiléen tout corps isolé (pas de forces extérieures appliquées ou résultante des forces nulle) se déplaçant présente un mouvement rectiligne uniforme

- Si R est un référentiel galiléen alors R' est un aussi un référentiel galiléen seulement si ce dernier est en translation uniforme par rapport à R ($v_e = cte,\ \omega = 0$)

- Si R' est accéléré ou en rotation par rapport à R ($v_e \neq cte$ et/ou $\omega \neq 0$) alors R' n'est plus un référentiel galiléen



4.1 Introduction

■ Référentiel non-galiléen

Sur Terre, nous sommes dans un référentiel en rotation ⇒ La Terre est un référentiel <u>non-galiléen</u>

<u>Conséquences :</u>

a) Tout objet placé dans ce référentiel subit une accélération, appelée *accélération d'inertie (ou encore appelée « d'entrainement », ou encore « centrifuge »)*

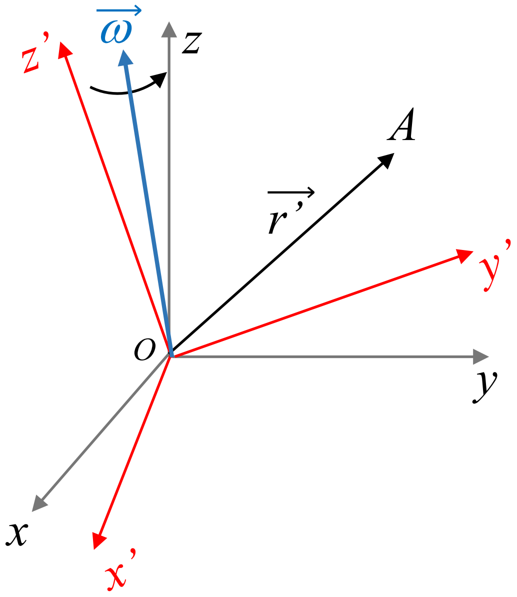
b) La trajectoire d'un objet en mouvement, telle qu'observée dans un repère attaché à la Terre, présente une déviation systématique par rapport à la trajectoire calculée par la 2^{nd} loi de Newton dans un référentiel galiléen. Cette trajectoire peut être décrite en tenant compte d'une accélération supplémentaire dite *accélération de Coriolis.*

La 2^{nd} loi de Newton $ma = \Sigma F_{ext}$ ne s'applique plus dans un référentiel en rotation ou dans un référentiel en accélération de translation.

Nous allons déterminer dans ce chapitre les expressions de la vitesse et de l'accélération dans des référentiels accélérés ou en rotation afin de pouvoir décrire les trajectoires observées.

4.2. Référentiel en rotation

■ Repère en rotation R' dans un repère fixe R



Soient deux repères R et R', avec R' en <u>rotation uniforme</u> ($\vec{\omega} = \overrightarrow{cte}$, $\vec{v_e} = \vec{0}$) par rapport à R qui est attaché à un référentiel galiléen (R et R' ont la même origine).

Math : La dérivée temporelle d'un vecteur $\overrightarrow{X'}$ dans R' exprimée dans R est

$$\left[\frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{X'}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{X'}$$

■ Vitesse d'un point A immobile dans le repère R' exprimée dans R :

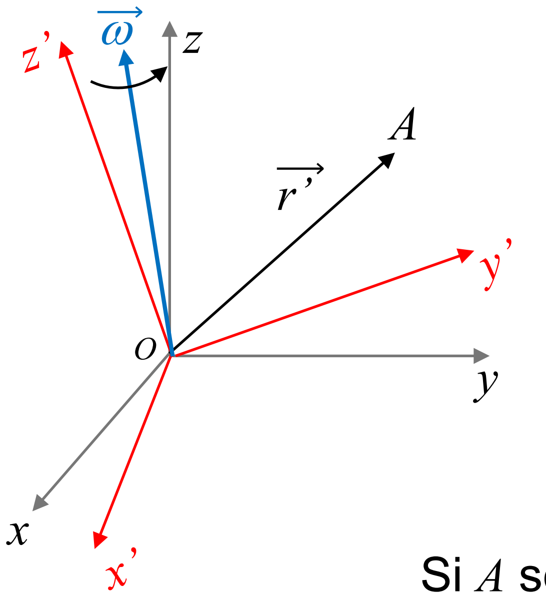
$\overrightarrow{r'}$ le vecteur position de A dans R'

$$\left[\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}\right]_R = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}\right]_{R'}}_{= \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{cte}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}} \quad \text{si } \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{cte}$$

Si A se déplace dans R' alors $\left[\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}\right]_{R'} = \overrightarrow{v'}$ et sa vitesse dans R est $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}}$

4.2. Référentiel en rotation

■ Repère en rotation R’ dans un repère fixe R



Considérons à nouveau le point A au repos dans R’. L’accélération est donnée par

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) = \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)\right]_{R'}}_{=\ \vec{0}\ \text{car}\ \vec{\omega} = \overrightarrow{cte}\ \text{et}\ \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{cte}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)$$

Soit $\boxed{\vec{a} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)}$ si $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{cte}$

Si A se déplace dans R’ à vitesse constante $\overrightarrow{v'}$, alors $\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}$. L’accélération est

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) = \frac{d\overrightarrow{v'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{v'}}{dt}\right]_{R'}}_{=\ \vec{0}\ \text{car}\ \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{cte}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{v'} + \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)\right]_{R'}}_{=\ \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{v'}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)$$

Finalement $\boxed{\vec{a} = 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{v'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)}$ si $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{cte}$